TRẦN SĨ TÙNG

---- ----

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

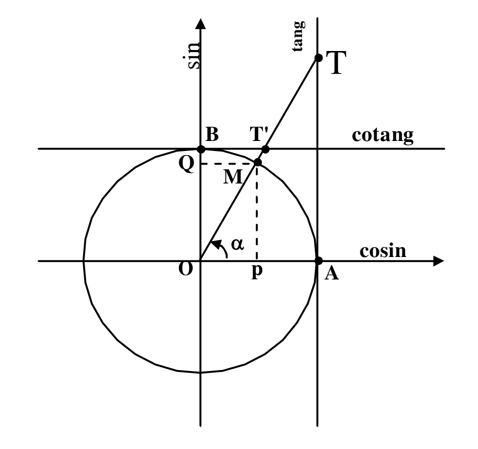
TÀI LIỆU ÔN THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG

Năm 2011

CHƯƠNG 0
ÔN TẬP CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC – HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. HỆ THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác:

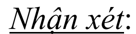


$\overline{OP} = \cos\alpha$

$\overline{OQ} = \sin\alpha$

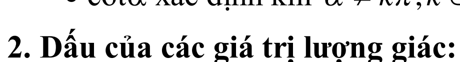
$\overline{AT} = \tan\alpha$

$\overline{BT'} = \cot\alpha$



Nhận xét:

- $\forall\alpha,\ -1 \le \cos\alpha \le 1;\ -1 \le \sin\alpha \le 1$
- tanα xác định khi $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
- cotα xác định khi $\alpha \ne k\pi, k \in Z$



2. Dấu của các giá trị lượng giác:

Cung phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	II	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–

3. Hệ thức cơ bản:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \tan\alpha.\cot\alpha = 1$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

4. Cung liên kết:

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

5. Bảng giá trị lượng giác của các góc (cung) đặc biệt

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	–1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	–1	0	$\|\|$	0
cot	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$\|\|$	0	$\|\|$

II. CÔNG THỨC CỘNG

Công thức cộng:

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

Hệ quả: $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

III. CÔNG THỨC NHÂN

1. Công thức nhân đôi:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}; \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

Công thức hạ bậc	Công thức nhân ba (*)
$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$	$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

2. Công thức biểu diễn *sina, cosa, tana* theo $t = \tan\frac{\alpha}{2}$: (*)

Đặt: $t = \tan\frac{\alpha}{2}$ $(\alpha \neq \pi + 2k\pi)$ thì: $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

1. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$	$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$
$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$	$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$	$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$
$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$	$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$$

V. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

TẬP XÁC ĐỊNH, TẬP GIÁ TRỊ, TÍNH CHẴN – LẺ, CHU KỲ

$y = \sin x$: Tập xác định D = R; tập giá trị $T = [-1, 1]$; hàm lẻ, chu kỳ $T_0 = 2\pi$.

* y = sin($ax + b$) có chu kỳ $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$
* y = sin(*f(x)*) xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

$y = \cos x$: Tập xác định D = R; tập giá trị $T = [-1, 1]$; hàm chẵn, chu kỳ $T_0 = 2\pi$.

* y = cos($ax + b$) có chu kỳ $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$
* y = cos(*f(x)*) xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

$y = \tan x$: Tập xác định $D = R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$; tập giá trị T = R, hàm lẻ, chu kỳ $T_0 = \pi$.

* y = tan($ax + b$) có chu kỳ $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$
* y = tan(*f(x)*) xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$

$y = \cot x$: Tập xác định $D = R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$; tập giá trị T = R, hàm lẻ, chu kỳ $T_0 = \pi$.

* y = cot($ax + b$) có chu kỳ $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$
* y = cot(*f(x)*) xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi \ (k \in Z)$.

* y = $f_1(x)$ có chu kỳ T_1 ;   y = $f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

CHƯƠNG I
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình sin$x$ = sinα

a) $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$

b) $\sin x = a$. *Điều kiện*: $-1 \le a \le 1$

$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$

c) $\sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)$

d) $\sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$

e) $\sin u = -\cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$

Các trường hợp đặc biệt:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in Z)$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z)$ $\qquad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z)$

$\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$

2. Phương trình cos$x$ = cosα

a) $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi \quad (k \in Z)$

b) $\cos x = a$. *Điều kiện*: $-1 \le a \le 1$

$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + k2\pi \quad (k \in Z)$

c) $\cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)$

d) $\cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$

e) $\cos u = -\sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$

Các trường hợp đặc biệt:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad (k \in Z)$ $\qquad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad (k \in Z)$

$\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in Z)$

3. Phương trình tan*x* = tanα

a) $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in Z)$
b) $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi \ (k \in Z)$
c) $\tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v)$
d) $\tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$
e) $\tan u = -\cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$

Các trường hợp đặc biệt:

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in Z)$ $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z)$

4. Phương trình cot*x* = cotα

$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in Z)$
$\cot x = a \Leftrightarrow x = \text{arccot}\, a + k\pi \ (k \in Z)$

Các trường hợp đặc biệt:

$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$ $\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z)$

5. Một số điều cần chú ý:

a) Khi giải phương trình có chứa các hàm số tang, cotang, có mẫu số hoặc chứa căn bậc chẵn, thì nhất thiết phải đặt điều kiện để phương trình xác định.

* Phương trình chứa tan*x* thì điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$.
* Phương trình chứa cot*x* thì điều kiện: $x \neq k\pi \ (k \in Z)$
* Phương trình chứa cả tan*x* và cot*x* thì điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in Z)$
* Phương trình có mẫu số:
  • $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \ (k \in Z)$
  • $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$
  • $\tan x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in Z)$
  • $\cot x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \ (k \in Z)$

b) Khi tìm được nghiệm phải kiểm tra điều kiện. Ta thường dùng một trong các cách sau để kiểm tra điều kiện:
1. Kiểm tra trực tiếp bằng cách thay giá trị của *x* vào biểu thức điều kiện.
2. Dùng đường tròn lượng giác.
3. Giải các phương trình vô định.

Bài 1. Giải các phương trình:

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$ 2) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=-1$

4) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ 5) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1$ 6) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1$

7) $\sin\left(3x+1\right)=\frac{1}{2}$ 8) $\cos\left(x-15^0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 9) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

10) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-\frac{1}{2}$ 11) $\tan\left(2x-1\right)=\sqrt{3}$ 12) $\cot\left(3x+10^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

13) $\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ 14) $\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 15) $\cos(2x+25^0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 2. Giải các phương trình:

1) $\sin(3x+1)=\sin(x-2)$ 2) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

3) $\cos 3x=\sin 2x$ 4) $\sin(x-120^0)+\cos 2x=0$

5) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ 6) $\sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$

7) $\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 8) $\cot\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

9) $\tan(2x+1)+\cot x=0$ 10) $\cos(x^2+x)=0$

11) $\sin(x^2-2x)=0$ 12) $\tan(x^2+2x+3)=\tan 2$

13) $\cot^2 x=1$ 14) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$

15) $\left|\cos x\right|=\frac{1}{2}$ 16) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2 x$

Bài 3. Giải các phương trình:

1) $\cos 3x.\tan 5x=\sin 7x$ 2) $\tan 5x.\tan 2x=1$

3) $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$ 4) $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$

5) $\cos^3 x.\cos 3x+\sin^3 x.\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 6) $\frac{1}{\cos x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}=8\cos x$

Bài 4. Giải các phương trình:

1) $2\cos x-\left|\sin x\right|=1$ 2) $\left|\sin x\right|+\cos 3x=0$

3) $\tan^2 x=\frac{1-\cos\left|x\right|}{1-\sin\left|x\right|}$ 4) $\left|\cot x\right|=\tan x+\frac{1}{\sin x}$

Bài 5. Giải và biện luận các phương trình:

1) $(m-1)\sin x+2-m=0$ 2) $\sin m.\cos x=1$

3) $(m-4)\tan 2x-\sqrt{m}=0$ 4) $(m+1)\sin 2x+1-m^2=0$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SINX VÀ COSX
Dạng: *a*.sin*x* +*b*.cos*x* = *c* (1)

Cách 1:

- Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Đặt: $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad \left(\alpha \in [0, 2\pi]\right)$

(1) trở thành: $\sin\alpha.\sin x + \cos\alpha.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta \quad (2)$$

- Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm là:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge c^2.$$

- (2) $\Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi \quad (k \in Z)$

Cách 2:

a) Xét $x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm hay không?

b) Xét $x \ne \pi + k2\pi \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} \ne 0.$

Đặt: $t = \tan\frac{x}{2}$, *thay* $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta được phương trình bậc hai theo *t*:

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (3)$$

Vì $x \ne \pi + k2\pi \Leftrightarrow b + c \ne 0$, nên (3) có nghiệm khi:

$$\Delta' = a^2 - (c^2 - b^2) \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2.$$

Giải (3), với mỗi nghiệm t_0, ta có phương trình: $\tan\frac{x}{2} = t_0$.

Ghi chú:

1) Cách 2 thường dùng để giải và biện luận.
2) Cho dù cách 1 hay cách 2 thì điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2+b^2 \ge c^2$.
3) Bất đẳng thức B.C.S:

$$|y| = |a.\sin x + b.\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \min y = -\sqrt{a^2+b^2} \text{ và } \max y = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a} = \frac{\cos x}{b} \Leftrightarrow \tan x = \frac{a}{b}$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$ 2) $\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x=\sqrt{2}$ 4) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x$

5) $\sqrt{3}\sin 2x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)=1$ 6) $\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x-\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\sqrt{3}-1=0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3$ 2) $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}\left(\sin 6x+\cos 8x\right)$

3) $8\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ 4) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$

5) $\sin 5x+\cos 5x=\sqrt{2}\cos 13x$ 6) $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$

7) $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x)$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1) $(3\cos x-4\sin x-6)^2+2+3(3\cos x-4\sin x-6)=0$

2) $(4\sin x-5\cos x)^2-13(4\sin x-5\cos x)+42=0$

3) $12\cos x+5\sin x+\dfrac{5}{12\cos x+5\sin x+14}+8=0$

4) $3\cos x+4\sin x+\dfrac{6}{3\cos x+4\sin x+1}=6$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

1) $3\sin x-2\cos x=2$ 2) $\sqrt{3}\cos x+4\sin x-\sqrt{3}=0$

3) $\cos x+4\sin x=-1$ 4) $2\sin x-5\cos x=5$

5) $4\sin x-3\cos x=5$ 6) $3\sin 2x+2\cos 2x=3$

7) $2\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{13}\sin 14x$ 8) $3\cos x+2\sqrt{3}\sin x=\dfrac{9}{2}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

1) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 2) $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$

Bài 6. Tìm *m* để các phương trình sau có nghiệm:

1) $(m+2)\sin x+m\cos x=2$ 2) $(m+1)\cos x+(m-1)\sin x=2m+3$

3) $(m-1)\sin x+2\sqrt{m}\cos x=m^2$ 4) $\sqrt{3}\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x=m$

Bài 7. Tìm *m* để các phương trình sau vô nghiệm:

1) $(2m-1)\sin x+(m-1)\cos x=m-3$ 2) $\sin x+m\cos x=1$

Bài 8. Tìm *x* sao cho $y=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$ là số nguyên.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

1) $y=(2-\sqrt{3})\sin 2x+\cos 2x$ 2) $y=(\sin x-\cos x)^2+2\cos 2x+3\sin x\cos x$

3) $y=\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$ 4) $y=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{\sin x+\cos x+2}$

Bài 10. Tìm các giá trị của α để phương trình có nghiệm x_0 được chỉ ra:

1) $(\cos\alpha+3\sin\alpha-\sqrt{3})x^2+(\sqrt{3}\cos\alpha-3\sin\alpha-2)x+\sin\alpha-\cos\alpha+\sqrt{3}=0$; $x_0=1$.

2) $(2\sin\alpha-\cos^2\alpha+1)x^2-(\sqrt{3}\sin\alpha)x+2\cos^2\alpha-(3-\sqrt{3})\sin\alpha=0$; $x_0=\sqrt{3}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng	Đặt	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	t = sin*x*	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	t = cos*x*	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	t = tan*x*	$x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in Z)$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	t = cot*x*	$x \ne k\pi\ (k \in Z)$

Nếu đặt: $t = \sin^2 x$ *hoặc* $t = |\sin x|$ *thì điều kiện*: $0 \le t \le 1$. (*tương tự đối với* cos*x*)

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$
2) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$
3) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$
4) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$
5) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$
6) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$
7) $6\sin^2 3x + \cos 12x = 14$
8) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$
9) $4\cos^5 x.\sin x - 4\sin^5 x.\cos x = \sin^2 4x$
10) $4\sin^2 x - 2\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x + \sqrt{3} = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $\tan^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$
2) $\cot^2 x + (\sqrt{3}-1)\cot x - \sqrt{3} = 0$
3) $\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$
4) $7\tan x - 4\cot x = 12$
5) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$
6) $\tan^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 3$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1) $4\sin^2 3x + 2\left(\sqrt{3}+1\right)\cos 3x - \sqrt{3} = 4$
2) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$
3) $4\cos^2(2 - 6x) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$
4) $\frac{1}{\cos^2 x} - \left(3+\sqrt{3}\right)\tan x - 3 + \sqrt{3} = 0$
5) $\frac{3}{\cos x} + \tan^2 x = 9$
6) $9 - 13\cos x + \frac{4}{1+\tan^2 x} = 0$
7) $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$
8) $\frac{1}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x = 5$
9) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}$
10) $2\cos 2x + \tan x = \frac{4}{5}$

Bài 4. Cho phương trình $\left(\sin x + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{1+2\sin 2x}\right) = \frac{3+\cos 2x}{5}$. Tìm các nghiệm của phương trình thuộc $\left(0;\, 2\pi\right)$.

Bài 5. Cho phương trình: $\cos 5x.\cos x = \cos 4x.\cos 2x + 3\cos^2 x + 1$. Tìm các nghiệm của phương trình thuộc $\left(-\pi\,;\,\pi\right)$.

Bài 6. Giải phương trình : $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$.

Bài 7. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm với mọi *m*:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + m\sin x.\cos x = \frac{1}{2}$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI
DẠNG: $a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = d$ (1)

Cách 1:

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có thoả mãn (1) hay không?

Lưu ý: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$.

- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1+\tan^2 x)$$

- Đặt: $t = \tan x$, đưa về phương trình bậc hai theo t:

$$(a-d)t^2 + b.t + c - d = 0$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$$(1) \Leftrightarrow a.\frac{1-\cos 2x}{2} + b.\frac{\sin 2x}{2} + c.\frac{1+\cos 2x}{2} = d$$

$\Leftrightarrow b.\sin 2x + (c-a).\cos 2x = 2d - a - c$ (đây là PT bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$)

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $5\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + 3\cos^2 x = 2$
2) $3\sin^2 x + 8\sin x.\cos x + 4\cos^2 x = 0$
3) $3\sin^2 x + 8\sin x.\cos x + \left(8\sqrt{3}-9\right)\cos^2 x = 0$
4) $2\cos^2 x - 3\sin x.\cos x + \sin^2 x = 0$
5) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x.\cos x - 2\cos^2 x = 4$
6) $3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0$
7) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$
8) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sin x.\cos x - 1 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $2\sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos^2 x = 1$
3) $2\sin^2 x - \left(3+\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = -1$
3) $\left(\sqrt{2}-1\right)\sin^2 x + \sin 2x + \left(\sqrt{2}+1\right)\cos^2 x = \sqrt{2}$
4) $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1) $\sin^3 x + 2\sin x.\cos^2 x - 3\cos^3 x = 0$
2) $\sqrt{3}\sin x.\cos x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$
3) $\sin^3 x - 5\sin^2 x.\cos x - 3\sin x.\cos^2 x + 3\cos^3 x = 0$

Bài 4. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

1) $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^2 x = 1$
2) $(3m-2)\sin^2 x - (5m-2)\sin 2x + 3(2m+1)\cos^2 x = 0$
3) $m\sin^2 x + \sin 2x + 3m\cos^2 x = 1$
4) $(m^2+2)\cos^2 x - 2m\sin 2x + 1 = 0$

V. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

Dạng 1: *a*.(sin*x* ± cos*x*) + *b*.sin*x*.cos*x* + *c* = 0

- Đặt: $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}.\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right);\ |t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2\sin x.\cos x \ \Rightarrow\ \sin x.\cos x = \pm\frac{1}{2}(t^2 - 1).$

- Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo *t*. Giải phương trình này tìm *t* thỏa $|t| \le \sqrt{2}$. Suy ra *x*.

Lưu ý:
- $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Dạng 2: *a*.|sin*x* ± cos*x*| + *b*.sin*x*.cos*x* + *c* = 0

- Đặt: $t = |\sin x \pm \cos x| = \sqrt{2}.\left|\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)\right|;\ Đk: 0 \le t \le \sqrt{2}.$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \pm\frac{1}{2}(t^2 - 1).$

- Tương tự dạng trên. Khi tìm *x* cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Dạng 3: Phương trình đối xứng theo tang và cotang.

Đặt $t = \tan x + \cot x \left(x \ne k\frac{\pi}{2};\ |t| \ge 2\right)$

Bài 1. Giải các phương trình:

1) $2\sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 8 = 0$
2) $2(\sin x + \cos x) + 3\sin 2x = 2$
3) $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x = -3$
4) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x + \cos x) = \sin 2x$
5) $\sin x + \cos x - 4\sin x.\cos x - 1 = 0$
6) $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x = 1 + \sqrt{2}$

Bài 2. Giải các phương trình:

1) $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) = 4$
2) $5\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$
3) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x - \cos x) = \sin 2x$
4) $\cos x - \sin x + 3\sin 2x - 1 = 0$
5) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
6) $\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\sin 3x} = 2\sqrt{2}$

Bài 3. Giải các phương trình:

1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 + (\sqrt{2} - 2)\sin x.\cos x$
2) $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x$
3) $3\tan^2 x + 4\tan x + 3\cot^2 x + 4\cot x + 2 = 0$
4) $2\sin 2x - 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x| + 8 = 0$
5) $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$
6) $1 - \sin 2x = |\cos x + \sin x|$

Bài 4. Tìm *m* để các phương trình sau có nghiệm:

1) $\sin x.\cos x = 6(\sin x + \cos x + m)$
2) $\sin 2x + 2\sqrt{2}m(\sin x - \cos x) + 1 - 4m = 0$
3) $\tan^2 x + \cot^2 x = m(\tan x - \cot x)$
4) $\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0$

VI. MỘT SỐ CÁCH GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

VẤN ĐỀ 1: PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Dạng: $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

Một trong các phương pháp thường được sử dụng để giải các phương trình lượng giác không mẫu mực là biến đổi đưa về dạng phương trình tích.

Các phép biến đổi thường sử dụng:

– Dùng công thức biến đổi từ tổng thành tích.

– Dùng công thức hạ bậc, rồi biến đổi từ tổng thành tích.

– Nếu phương trình có tổng của nhiều biểu thức dạng tích mà không có nhân tử chung thì nên biến đổi các tích thành tổng để ước lược, rồi biến đổi từ tổng thành tích.

Ví dụ 1: *Giải phương trình:* $\sin x.\cos 2x = \sin 2x.\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 5x$ *(*)*

- *(*)* $\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) - \frac{1}{2}\sin 5x \Leftrightarrow \sin x(2\cos 2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$$

Ví dụ 2: *Giải phương trình:* $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$ *(*)*

- *(*)* $\Leftrightarrow 2\cos 4x.\cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $1 + 2\sin x.\cos x = \sin x + 2\cos x$
2) $\sin x(\sin x - \cos x) - 1 = 0$
3) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$
4) $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$
5) $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$
6) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$
7) $(\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$
8) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$
2) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$
3) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$
4) $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$
5) $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0$
6) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1) $2\cos x.\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$
2) $3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x.\sin 2x$
3) $2\sin x.\cos 2x + 1 + 2\cos 2x + \sin x = 0$
4) $\cos 5x.\cos x = \cos 4x.\cos 2x + 3\cos^2 x + 1$
5) $4\sin 2x.\sin 5x.\sin 7x = \sin 4x$
6) $\cos 3x.\cos 4x + \sin 2x.\sin 5x = \frac{1}{2}\cos 2x + \cos 4x$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

1) $\sin^2 x = \sin^2 3x$
2) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$
3) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$
4) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$
5) $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$

Bài 5. Giải các phương trình sau: (*dùng công thức hạ bậc*)

1) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{1}{4}$

2) $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{1}{8}$

3) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5}{8}$

4) $\cos^4 x + 2\sin^6 x = \cos 2x$

5) $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 x + \dfrac{1}{4\sin^2 2x} - 1 = 0$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

1) $\sin^3 x + \cos^3 x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x.\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin 3x$

2) $1 + \sin 2x + 2\cos 3x(\sin x + \cos x) = 2\sin x + 2\cos 3x + \cos 2x$

3) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos x + \cos 2x + \cos 3x)$

4) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos 2x = 0$

5) $\sin^2 x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\sin x.\sin^2\dfrac{x}{2} + \cot x = 0$

6) $\sin^2 x.\cos x - \cos 2x + \sin x - \cos^2 x.\sin x - \cos x = 0$

7) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$

8) $\sin x.\sin 4x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3}\cos x.\sin 4x$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

1) $\sin 3x.\sin 6x = \sin 9x$

2) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x$

3) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

4) $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

5) $\cot x - \tan x = \sin x + \cos x$

6) $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x)$

7) $1 + \tan 2x = \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos^2 2x}$

8) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

Bài 8. Giải các phương trình sau:

1)

VẤN ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP TỔNG HAI SỐ KHÔNG ÂM

Dạng: $\begin{cases} A \geq 0;\ B \geq 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Đặc biệt:

- $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} |A| \leq 1, |B| \leq 1 \\ A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| \leq 1, |B| \leq 1 \\ (1 - A) + (1 - B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$

Ví dụ: *Giải phương trình:* $\cos 2x - \cos 6x + 4(3\sin x - 4\sin^3 x + 1) = 0$ *(*)*

(*) $\Leftrightarrow \cos^2 x + (\sin 3x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + l2\pi$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin 3x$
2) $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x$
3) $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$
4) $\cos 2x - \cos 6x + 4(3\sin x - 4\sin^3 x + 1) = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $\sin 2x + \sin\frac{2x}{5} - 2 = 0$
2) $\sin^5 x - \cos^2 x = 1$
3) $\sin x(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) = 1$
4) $\sin 2x.\cos 8x = 1$
5) $\sin 7x + \cos 2x = -2$
6) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$
7) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + 4\sin 4x = 10$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1)

VẤN ĐỀ 3: PHƯƠNG PHÁP ĐỐI LẬP

Dạng: $\begin{cases} A \geq M \\ B \leq M \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M \end{cases}$

Để sử dụng phương pháp này ta cần chứng minh 2 bất đẳng thức: $A \geq M$ và $B \leq M$.
Chú ý: Các bất đẳng thức thường dùng:

- *Bất đẳng thức lượng giác cơ bản:* $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1;\ 0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1$
- *Bất đẳng thức Cô–si: Với mọi a, b ≥ 0, ta có:* $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.
- *Bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki: Với 2 cặp số (a, b) và (x, y) ta có:*

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

Đặc biệt: $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

Ví dụ: *Giải phương trình:* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$ *(*)*

- *Ta có:* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

$$\sqrt{2}(2 - \sin 3x) = \sqrt{2}\left[1 + (1 - \sin 3x)\right] \geq \sqrt{2}$$

Do đó: *(*)* $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases}$ *(vô nghiệm)*

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$
2) $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$
3) $\sqrt{5 + \sin^2 3x} = \sin x + 2\cos x$
4) $\sqrt{2 + \cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} = 2 + \sqrt{1 + \cos 4x}$
2) $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$
3) $\pi^{\left|\sin\sqrt{x}\right|} = \left|\cos x\right|$
4) $3^{\left|\sin\sqrt{x}\right|} = \left|\cos x\right|$
5) $2^{|x|} = \sin x^2$
6) $2\cos\frac{x}{3} = 2^x + 2^{-x}$
7) $2\cos^2\frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1) $\cos(\pi x) = x^2 - 4x + 5$

VẤN ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

Dạng: $\begin{cases} A \le M,\ B \le N \\ A + B = M + N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}$

Ví dụ: *Giải phương trình:* $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$ *(*)*

• *Ta có:* $\begin{cases} \cos^7 x \le \cos^2 x \\ \sin^4 x \le \sin^2 x \end{cases}$. *Suy ra: (*)* $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^7 x = \cos^2 x & (1) \\ \sin^4 x = \sin^2 x & (2) \end{cases}$

Phương trình (1) cho ta $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right.$.

– *Khi* $\cos x = 0$ *thì* $\sin x = \pm 1$ *: nghiệm đúng phương trình (2)*
– *Khi* $\cos x = 1$ *thì* $\sin x = 0$ *: nghiệm đúng phương trình (2)*

Vậy (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right.$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $\sin^4 x + \cos^{15} x = 1$ 2) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$

3) $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1)

VẤN ĐỀ 5: PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

• *Dự đoán nghiệm và sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất.*

• *Cho hàm số y = f(x) đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng (α; β). Khi đó, với mọi a, b ∈ (α; β) ta có: f(a) = f(b) ⇔ a = b.*

Chú ý: Trong một số trường hợp, ta cần phải dựa vào bảng biến thiên để nhận xét.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $\cos x = 1 + x$

2) $\sin x = x$

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2}$

4) $2^{\sin x} = \cos x,\ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

5) $\sin x + \tan x - 2x = 0,\ 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$

Bài 2. Tìm *m* để các phương trình sau có nghiệm:

1) $\cos^2 x + (1-m)\cos x + m - 1,\ x \in (0;\pi)$

2) $\sin x + \cos x + 1 + \dfrac{1}{2}\left(\tan x + \cot x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}\right) = m,\ x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

3) $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$

4) $\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x)$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1)

VI. BÀI TẬP ÔN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $1+\tan x = \tan 3x(1-\tan x)$
2) $8.\cos x.\cos 2x.\cos 4x = \dfrac{\sin 6x}{\sin x}$
3) $4\cos x.\cos 2x.\cos 4x + 1 = 0$
4) $\sin x - 2\sin x - \sin 3x = 2\sqrt{2}$
5) $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$
6) $\cos^2 x - 4\cos x - 2x.\sin x + x^2 + 3 = 0.$

ĐS: 1) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$ *2)* $x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7}$ *3)* $x = \pi + k2\pi;\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
4) vô nghiệm *5)* $x = k\pi$ *6)* $x = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $\tan 2x.\tan 7x = 1$
2) $\sin^3 x + \cos^3 x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2} - \sin x.\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$
4) $\dfrac{3+\cos x - \sin x}{3\cos x + 1 - \sin x} = 1 - \dfrac{1}{2}\tan^2\dfrac{x}{2}$
5) $3 - \sin x + \tan x = \dfrac{5\cos^4\dfrac{x}{2}}{\cos x}$
6) $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x) = 2$

ĐS: 1) $x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{\pi}{9}$ *2)* $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi;\ x = \dfrac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi,\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$
3) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$
4) $x = k2\pi;\ x = 2\alpha + k2\pi\ (\tan\alpha = \sqrt{5}-1);\ x = -2\beta + k2\pi\ (tg\beta = \sqrt{5}+1)$
5) vô nghiệm *6)* $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1) $\tan x + \tan 4x = 2\tan 3x$
2) $9\cos 3x.\cos 5x + 7 = 9\cos 3x.\cos x + 12\cos 4x$
3) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x.$
4) $\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = 1 - \sin x$ *thỏa* $\left|\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right| \le \dfrac{3\pi}{4}.$
5) $3^{\frac{1}{2}+\log_3 \cos x} + \sqrt{6} = 9^{\frac{1}{2}+\log_9 \sin x}$
6) $\sin^{1994} x + \cos^{1994} x = 1$

ĐS: 1) $x = k\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$ *2)* $x = \pi + k2\pi;\ x = \pm\alpha + l2\pi,\ \cos\alpha = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} - 1$
3) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ *4)* $x = \dfrac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \dfrac{5\pi}{2}$ *5)* $x = -\dfrac{5\pi}{12} + k2\pi$ *6)* $x = k\dfrac{\pi}{2}$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{3}\sin 3x - 2\sin^2 x = 2\sqrt{3}\sin x.\cos 2x$
2) $2\cos 13x + 3(\cos 5x + \cos 3x) = 8\cos x.\cos^3 4x$
3) $\dfrac{1+\cos 2x + \cos 5x + \cos 3x}{2\cos^2 2x + \cos x - 1} = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin x$
4) $\sin x.\tan 2x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}.\tan 2x) = 3\sqrt{3}$ *thỏa* $2 + \log_{\frac{1}{2}} x \le 0$
5) $3\cot^2 x + 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cot x - 4\cos x + 2 = 0$

ĐS: 1) $x = k\pi;\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi;\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ 2) $x = k\frac{\pi}{12}$ 3) $x = k2\pi$

4) $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2},\ k \ge 3$ 5) $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 5. Tìm *m* để phương trình:

1) $\sin 5x = m.\sin x$ có ít nhất một nghiệm $x \ne k\pi\ (k \in Z)$.

2) $\sin x + \cos x + 1 + \frac{1}{2}\left(\tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3) $2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x$ có đúng 2 nghiệm thuộc $[0;\pi]$.

4) $\cos^4 x + (1 - \cos x)^4 = m$ vô nghiệm.

5) $\cos^3 x + \sin^3 x = m.\sin x.\cos x$ có nghiệm.

6) $\sin^2 x + \sin^2 3x - m.\cos^2 2x = 0$ có nghiệm.

ĐS: 1) $-\frac{5}{4} \le m < 5$ 2) $m \ge 2(\sqrt{2} + 1)$ 3) $m < -1$ *hay* $m > 3$ *hay* $m = 0$.

4) $m < \frac{1}{18} \vee m > 17$ 5) $\forall m \in R$ 6) $m \ge 0$.

Bài 6. Tìm *m* để phương trình:

1) $3\cos^2 x + 2|\sin x| = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

2) $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$ có nghiệm.

3) $\sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x} = m$ có nghiệm.

ĐS: 1) 2) $\sqrt{2} - 4 \le m \le \frac{65}{16}$. 3) $\sqrt{1 + \sqrt{3}} \le m \le 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

Bài 7. Giải các phương trình sau:

1)

ĐỀ THI ĐẠI HỌC

Bài 1. (ĐH 2002A) Tìm nghiệm thuộc khoảng (0; 2π) của phương trình:

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3$$

HD: Điều kiện: $\begin{cases} x\neq -\dfrac{\pi}{12}+m\pi \\ x\neq \dfrac{7\pi}{12}+n\pi \end{cases}$. *PT* $\Leftrightarrow 5\cos x=2\cos 2x+3 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3} \\ x=\dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right.$.

Bài 2. (ĐH 2002B) Giải phương trình: $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$

HD: PT $\Leftrightarrow \cos x.\sin 9x.\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x.\sin 9x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\dfrac{\pi}{9} \\ x=k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

Bài 3. (ĐH 2002D) Tìm *x* thuộc đoạn [0; 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$$

HD: *PT* $\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x-2)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}; x=\dfrac{3\pi}{2}; x=\dfrac{5\pi}{2}; x=\dfrac{7\pi}{2}$.

Bài 4. (ĐH 2002A–db1) Cho phương trình: $\dfrac{2\sin x+\cos x+1}{\sin x-2\cos x+3}=a$ (*a* là tham số).

1. Giải phương trình khi $a=\dfrac{1}{3}$.
2. Tìm *a* để phương trình có nghiệm.

HD: *1)* $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ *2)* $-\dfrac{1}{2}\le a\le 2$ *(Đưa về PT bậc 1 đối với sinx và cosx)*

Bài 5. (ĐH 2002A–db2) Giải phương trình: $\tan x+\cos x-\cos^2 x=\sin x\left(1+\tan x.\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

HD: $x=k2\pi$. *Chú ý: Điều kiện:* $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos x\neq -1\end{cases}$ *và* $1+\tan x.\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\cos x}$.

Bài 6. (ĐH 2002B–db1) Giải phương trình: $\tan^4 x+1=\dfrac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$.

HD: *Điều kiện: cosx* $\neq 0$*. PT* $\Leftrightarrow \sin 3x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3};\ x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}$.

Bài 7. (ĐH 2002B–db2) Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\cot 2x-\dfrac{1}{8\sin 2x}$.

HD: *Điều kiện: sin2x* $\neq 0$*. PT* $\Leftrightarrow \cos^2 2x-5\cos 2x+\dfrac{9}{4}=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

Bài 8. (ĐH 2002D–db1) Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{1}{8\cos^2 x}}=\sin x$.

HD: *Điều kiện:* $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x>0\end{cases}$

PT $\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{8}+k2\pi;\ x=\dfrac{3\pi}{8}+k2\pi;\ x=\dfrac{5\pi}{8}+k2\pi;\ x=\dfrac{7\pi}{8}+k2\pi$

Bài 9. (ĐH 2002D–db2) Xác định *m* để phương trình:

$$2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\cos 4x+2\sin 2x-m=0 \qquad (*)$$

có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

HD: $-\frac{10}{3}\le m\le -2$.

Đặt t = sin2x. (*) có nghiệm thuộc $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\Leftrightarrow f(t)=3t^2-2t=m+3$ *có nghiệm t∈[0;1]*

Bài 10. (ĐH 2003A) Giải phương trình: $\cot x-1=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$.

HD: Điều kiện: $\sin x\ne 0,\ \cos x\ne 0,\ \tan x\ne -1$.

$PT\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(1-\sin x.\cos x+\sin^2 x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Bài 11. (ĐH 2003B) Giải phương trình: $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$.

HD: Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}$. $PT\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Bài 12. (ĐH 2003D) Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$.

HD: Điều kiện: $\cos x\ne 0$.

$PT\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\cos x)(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$.

Bài 13. (ĐH 2003A–db1) Giải phương trình: $\cos 2x+\cos x\left(2\tan^2 x-1\right)=2$.

HD: Điều kiện: cosx ≠ 0.

$PT\Leftrightarrow (1+\cos x)(2\cos^2 x-5\cos x+2)=0\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

Bài 14. (ĐH 2003A–db2) Giải phương trình: $3-\tan x\left(\tan x+2\sin x\right)+6\cos x=0$.

HD: Điều kiện: cosx ≠ 0. $PT\Leftrightarrow (1+\cos 2x)(3\cos^2 x-\sin^2 x)=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$

Bài 15. (ĐH 2003B–db1) Giải phương trình: $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$.

HD: $PT\Leftrightarrow \cos 2x(-2\cos^4 x+5\cos^2 x-3)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ x=k\pi$

Bài 16. (ĐH 2003B–db2) Giải phương trình: $\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1$.

HD: Điều kiện: $\cos x\ne\frac{1}{2}$. $PT\Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos x+\sin x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi$

Bài 17. (ĐH 2003D–db1) Giải phương trình: $\frac{\cos^2 x\left(\cos x-1\right)}{\sin x+\cos x}=2(1+\sin x)$.

HD: Điều kiện: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ne 0$.

$PT\Leftrightarrow (1+\sin x)^2(1+\cos x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\pi+k2\pi$

Bài 18. (ĐH 2003D–db2) Giải phương trình: $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$.

HD: Điều kiện: sin2x ≠ 0. PT $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Bài 19. (ĐH 2004B) Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$.

HD: Điều kiện: $\cos x \neq 0$. *PT* $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 20. (ĐH 2004D) Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

HD: PT $\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$.

Bài 21. (ĐH 2004A–db1) Giải phương trình: $4\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) = \cos x + 3\sin x$.

HD: PT $\Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Bài 22. (ĐH 2004A–db2) Giải phương trình: $\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{1-\cos x} = 1$.

HD: Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{1-\sin x} \\ v = \sqrt{1-\cos x} \end{cases}$. *PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ (1-u^2)^2 + (1-v^2)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = k2\pi$.

Bài 23. (ĐH 2004B–db1) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

HD: Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$. *PT* $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 24. (ĐH 2004B–db2) Giải phương trình: $\sin 4x.\sin 7x = \cos 3x.\cos 6x$.

HD: $x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10};\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Bài 25. (ĐH 2004D–db1) Giải phương trình: $2\sin x.\cos 2x + \sin 2x.\cos x = \sin 4x.\cos x$.

HD: PT $\Leftrightarrow \sin 3x(\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$.

Bài 26. (ĐH 2004D–db2) Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x)$.

HD: PT $\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi;\ x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$

Bài 27. (ĐH 2005A) Giải phương trình: $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0$.

HD: PT $\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$.

Bài 28. (ĐH 2005B) Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

HD: PT $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Bài 29. (ĐH 2005D) Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 30. (ĐH 2005A–db1) Tìm nghiệm trên khoảng $(0;\ \pi)$ của phương trình:

$$4\sin^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

HD: $PT \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18};\ x = \frac{17\pi}{18};\ x = \frac{5\pi}{6}$.

Bài 31. (ĐH 2005A–db2) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow \cos^3 x + \sin^3 x + 3\cos^2 x.\sin x + 3\cos x.\sin^2 x - 3\cos x - \sin x = 0$

Xét 2 trường hợp:

a) Nếu $\cos x = 0$ *thì* $PT \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^3 x - \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

b) Nếu $\cos x \neq 0$ *thì ta chia 2 vế của PT cho* $\cos^3 x$.

Khi đó: $PT \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy: PT có nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *hoặc* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 32. (ĐH 2005B–db1) Giải phương trình : $\sin x.\cos 2x + \cos^2 x\left(\tan^2 x - 1\right) + 2\sin^3 x = 0$.

HD: Điều kiện: $\cos x \neq 0$. $PT \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 33. (ĐH 2005B–db2) Giải phương trình : $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$

HD: Điều kiện: $\cos x \neq 0$. $PT \Leftrightarrow \tan^3 x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 34. (ĐH 2005D–db1) Giải phương trình: $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.

HD: Điều kiện: $\sin x \neq 0$. $PT \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 35. (ĐH 2005D–db2) Giải phương trình: $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 36. (ĐH 2006A) Giải phương trình: $\frac{2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin x.\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$.

HD: Điều kiện: $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$. *PT* $\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận PT có nghiệm: $x = \frac{5\pi}{4} + 2m\pi$.

Bài 37. (ĐH 2006B) Giải phương trình: $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x.\tan\frac{x}{2}\right) = 4$.

HD: Điều kiện: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos\frac{x}{2} \neq 0$.

$$PT \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$$

Bài 38. (ĐH 2006D) Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow \sin^2 x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 39. (ĐH 2006A–db1) Giải phương trình: $\cos 3x.\cos^3 x - \sin 3x.\sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$.

HD: $PT \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$.

Bài 40. (ĐH 2006A–db2) Giải phương trình: $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 41. (ĐH 2006B–db1) Giải phương trình: $\left(2\sin^2 x - 1\right)\tan^2 2x + 3\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$.

HD: Điều kiện: $\cos 2x \neq 0$. $PT \Leftrightarrow \cos 2x\left(\tan^2 2x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

Bài 42. (ĐH 2006B–db2) Giải phương trình: $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 43. (ĐH 2006D–db1) Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$.

HD: $PT \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \cos x)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 44. (ĐH 2006D–db2) Giải phương trình: $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow (\sin x + 1)(-2\cos^2 x + 3\cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 45. (ĐH 2007A) Giải phương trình: $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$

HD: $PT \Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\sin x)(1-\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 46. (ĐH 2007B) Giải phương trình: $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$.

HD: $PT \Leftrightarrow \cos 4x\left(2\sin 3x-1)=0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$.

Bài 47. (ĐH 2007D) Giải phương trình: $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$.

HD: $PT \Leftrightarrow 1+\sin x+\sqrt{3}\cos x=2 \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$

Bài 48. (ĐH 2007A–db1) Giải phương trình: $\sin 2x+\sin x-\dfrac{1}{2\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=2\cot 2x$.

HD: Điều kiện $\sin 2x\neq 0$. $PT \Leftrightarrow \cos 2x\left(2\cos^2 x+\cos x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$.

Bài 49. (ĐH 2007A–db2) Giải phương trình:

$$2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+1=3(\sin x+\sqrt{3}\cos x).$$

HD: $PT \Leftrightarrow 2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi$.

Bài 50. (ĐH 2007B–db1) Giải phương trình: $\sin\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{3x}{2}$

HD: $PT \Leftrightarrow \cos\dfrac{3x}{2}\left(2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 51. (ĐH 2007B–db2) Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\sin x}=\tan x-\cot x$.

HD: Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$. $PT \Leftrightarrow \cos x=-\cos 2x \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

Bài 52. (ĐH 2007D–db1) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos x=1$

HD: $PT \Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\dfrac{\pi}{12}=\sin\dfrac{5\pi}{12} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ *hay* $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

Bài 53. (ĐH 2007D–db2) Giải phương trình: $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$.

HD: Điều kiện: $\cos x \neq 0$. *PT* $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right.$.

Bài 54. (ĐH 2008A) Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$.

HD: Điều kiện: $\sin x \neq 0, \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \neq 0$.

$$PT \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(\frac{1}{\sin x \cos x} + 2\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right.$$

Bài 55. (ĐH 2008B) Giải phương trình: $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$.

HD: PT $\cos 2x\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Bài 56. (ĐH 2008D) Giải phương trình: $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$.

HD: PT $\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi;\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 57. (ĐH 2008A–db1) Tìm nghiệm trên khoảng $(0;\ \pi)$ của phương trình:

$$4\sin^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

HD: PT $\Leftrightarrow -2\cos x = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - x\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ *hay* $x = -\frac{7\pi}{6} + h2\pi$

Do $x \in (0;\pi)$ *nên chỉ chọn* $x = \frac{5\pi}{18};\ x = \frac{17\pi}{18};\ x = \frac{5\pi}{6}$.

Bài 58. (ĐH 2008A–db2) Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$.

HD: PT $\Leftrightarrow \cos^3 x + \sin^3 x + 3\cos^2 x.\sin x + 3\cos x.\sin^2 x - 3\cos x - \sin x = 0$

Xét 2 trường hợp:

a) Nếu $\cos x = 0$ *thì PT* $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^3 x - \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

b) Nếu $\cos x \neq 0$ *thì ta chia 2 vế của PT cho* $\cos^3 x$.

Khi đó: PT $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy: PT có nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *hoặc* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 59. (ĐH 2008B–db1) Giải phương trình: $\sin x \cos 2x + \cos^2 x\left(\tan^2 x - 1\right) + 2\sin^3 x = 0$.

HD: Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$PT \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Bài 60. (ĐH 2008B–db2) Giải phương trình: $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$.

HD: Điều kiện: $\cos x \neq 0$. $PT \Leftrightarrow \tan^3 x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 61. (ĐH 2008D–db1) Giải phương trình: $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.

HD: Điều kiện: $\sin x \neq 0$. $PT \Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 62. (ĐH 2008D–db2) Giải phương trình: $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

HD: $PT \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi;\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \pi + k2\pi$.

Bài 63. (ĐH 2009A) Giải phương trình: $\dfrac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$.

HD: Điều kiện: $\sin x \neq 1,\ \sin x \neq -\dfrac{1}{2}$.

$PT \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

Bài 64. (ĐH 2009B) Giải phương trình: $\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$.

HD: $PT \Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{42} + k\dfrac{2\pi}{7} \end{array}\right.$.

Bài 65. (ĐH 2009D) Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \dfrac{1}{2}\sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

Bài 66. (ĐH 2010A) Giải phương trình: $\dfrac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

HD: Điều kiện: $\cos x \neq 0;\ 1 + \tan x \neq 0$.

$PT \Leftrightarrow \sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Bài 67. (ĐH 2010B) Giải phương trình: $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow (\sin x + \cos x + 2)\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Bài 68. (ĐH 2010D) Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$.

HD: $PT \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Bài 69. (ĐH 2011A)

1.